Bilgisayarın ve Sonlu-Elemanlar Yönteminin Yerbilimlerinde Litolojik Dağılım ve Gerilim Çözümlemelerinde Uygulaması

Application of computer and finite~elements method to lithology and stress analysis in earth sciences

K. ERÇtN KASAPOĞLU *Yerbilimleri Bölümü, Hacettepe Üniversitesi, Ankara*

ÖZ: Bilgisayarı ve sonlu-elemanlar yöntemini yerbilimlerinin çeşitli sorunlarına uygulama olanakları çok geniştir. Bu uygulamalardan elde edilecek sonuçlar, yerkabuğunun fiziksel yapısının saptanmasında büyük ölçüde yararlı olabilir. Sonlu-elemanlar yöntemini ve bu yöntemi jeolojik özellikteki yapısal sorunlara uygulama tekniğini yerbilimcilere tanıtmak amacı île seçilen örnek uygulama çalışmasında, düz bir topografya ile sınırlı elastik-heterojen bir litolojik ortam modelinde yerçekimi ve tektonik gerilim bileşenlerinin dağılımı incelenmiştir. Bu dağılımlardan, ortamdaki litolojik heterojenliğin ortamın deformasyon moduna olan etkisi, kritik gerilim birikim noktaları, ve olasıl kırılma yüzeylerinin yer ve yönleri saptanabilmiştir. Sonlu-elemanlar yöntemini kullanarak yapılacak model çalışmalarından ve elde edilecek bilgisayar verilerinden, doğru olarak yorumlanmaları koşulu ile, bazı yapısal jeoloji sorunlarının pratik çözümlerinde geniş ölçüde yararlanmak olanağı vardır.

ABSTRACT: Computer and finite-elements method have a very wide range of application in various fields of earth sciences. The results to be obtained from these applications may be of critical importance towards the advancement of our knowledge of the physical constitution of the earth crust. The purpose of this paper is to introduce to earth scientists the finite-elements method and its application techniques for the solution of various structural problems. In the example given herein, the distributions of gravitational andtectonic stress components in an elastically heterogeneous material under flat ground are shown. From these distributions, the affects of the lithological heterogeneity to the deformation mode of the medium, the points of critical stress concentrations, and the possible fracture surfaces with their locations and directions could be determined. From the model studies, employing the finite^elements method, and from the computer data, providing that they are interpreted correctly, practical solutions for some structural geology problems could be obtained.

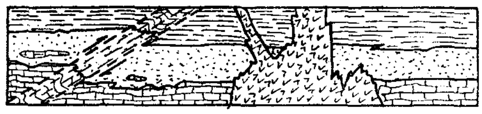
GİRİŞ

Yerçekimi ve tektonik kuvvetlerin etkisi altında bulunan jeolojik yapılarda gerilim çözümlemeleri karmaşık fakat ilginç bir sorundur. Son bir kaç yıl içinde bilgisayar tekniğindeki gelişmelere paralel olarak, bu karmaşık sorunlara matematiksel yöntemlerle çözüm getirme çalışmaları artmıştır. Ancak, bu çalışmalardaki klasik matematiksel fizik ilkelerinin uygulanamsmda öngörülen bazı önemli varsayımların, (örneğin, litolojik ortamın mükemmel elastik, izotropik, homojen, sürekli, ve çok sadeleştirilmiş sınır koşulları ile çevrelenmiş olması gibi) gerçek doğa koşullarına olan yakınlığı üzerindeki kuşkular. elde edilen matematiksel sonuçların güvenirliklerine gölge düşürmektedir.

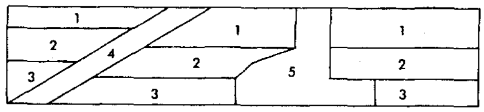
Jeolojik sorunlara ilişkin gerilim dağılımı çözümlemelerinde kullanılan tipik fonksiyon, iki-boyutlu çözümler için en uygun fonksiyon olan, klasik elastisitenin "Airy Gerilim Fonksiyonu" dur. Ançak, bu fonksiyonun çeşitli saha koşullarını yansıtan değişik modellere daha iyi uygulanabilir bir duruma getirilebilmesi için fonksiyonda bazı değişiklikler yapmak gerekir. Oysa, bu yönde yapılan çalışmalar (Howard, 1966) yok denecek kadar azdır. Bunun nedeni, yerbilimcilerin genellikle mühendislik mekaniği yöntemlerine fazla ilgi duymamaları olabilir.

Malzeme özellikleri ve sınır koşulları için öngörülecek uygun varsayımlarla, bir yapısal jeolojik modeldeki gerilimlerin ve yerdeğişimlerin genel özelliği analitik olarak saptanabilir ve elda edilen sonuçlar sahada gözlenebilen yapısal elemanlarla karşılaştırılabilir. Böyle bir karşılaştırmada bir uyum sağlanabiliyorsa, öngörülen teorik modelin uygulanabilirliği ve yeterliliği kanıtlanmış olur. Yazar ,bu şekildeki bir yaklaşımın yerbilimcilere saha çalışmalarında karşılaştıkları bazı temel sorunların çözümünde yararlı olacağı kanısındadır. Ancak, teorik model çalışmalarında öngörülen ve kesin olmayan bazı varsayımların sonuçlar üzerindeki etkilerini kabul etmek ve bu sonuçlara ilişkin yorumlarda dikkatli olma,k gerekir. Örneğin, çok küçük yerdeğişimler içeren, doğrusal-elastik, izotropik, homojen, ve sürekli bir ortam modeli için elde edilen matematiksel bir çözüm, genellikle büyük yerdeğişimlere uğramış, anizotropik, heterojen, ve süreksiz olma olasılığı fazla, doğrusal olmayan inelastik bir doğa ortamı (jeolojik ortam) ile nasıl ve ne derece karşılaştırılabilir?

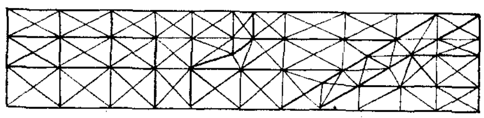
Sonlu-elamanlar yöntemi inelastik, anioztropik, heterojen malzeme özellikleri ve katman yüzeyleri, faylar, eklemler gibi süreksizlik düzlemleri içeren herhangi bir geometrik şekle sahip sisteme kolayca uygulanabilirliği nedeni ile yerbilimciler için önemli .bir yöntem olmuştur, ve büyük ilgi görmektedir (Şekil 1).



Jeolojik yapı (Voight ve Samuelson, 1969'dan)



Sonlu element zonları (Voight ve Samuelson, 1969'dan)



Sonlu elementler konfigürasyonu

Şekil 1: Yapısal-jeolojik ortam ile sonlu elementler modeli arasındaki ilişki

ÇÖZÜMLEME YÖNTEMİ

Sonlu-elamanlar kavramı, sürekli bir katının belirli sayıda üçgen elamanlara bölümünü öngörür (Şekil 2). Bu şekilde oluşturulan üçgen elemanlar ağında, her eleman veya elemanlar grubu belirli fiziksel özellikleri (birim ağırlık, elastisite modülü, poisson oranı ve dayanım parametreleri gibi) ile tanımlanır. Eğer bu elemanların herbiri için kuvvet-yerdeğişim ilişkisi biliniyorsa, bilinen yapısal çözümleme yöntemleri (Livesley, 1964; Robinson, 1966) ile tüm sistemin davranışı saptanabilir. Buradaki tek yaklaştırma, gerçek sistemin yerine bu üçgen elemanlar modelinin konulmuş olmasıdır. Modelin matematiksel çözümlemesinde herhangi bir yaklaştırmaya gerek yoktur.

Sonlu-elemanlar teorisi ve bunun çeşitli mühendislik sorunlarına uygulaması başkaları tarafından ayrıntılı olarak tartışılmıştır (Turner et al, 1950; Zienkiewics, 1965; Clough, 1965; Zienkiewicz, 1967). Burada sadece yöntemde içerilen temel fiziksel ilkelere değini-.lecektir.

Sonlu-elemanlar yönteminin temel denklemi üçgen elemanların köşe noktalarındaki yerdeğişimler (U) ile bu noktalara etki eden kuvvetler (F) arasındaki ilişkiyi gösteren

$$[F] = [K] \quad [U]$$

denklemidir. Burada, [K] üçgen elemanların fiziksel parametrelerinden oluşan ve ortamın mekanik davranışını karakterize eden bir ifade olup "stiffness matrix olarak bilinir, ve

$$[K] = [B] \; [D] \; [B]T \; _{A}t$$

eşitliği ile tanımlanır.

Burada: B, elemandaki birimdeformasyon ile köşe noktalarının yerdeğişimleri arasındaki ilişkiyi belirleyen matriks; D, gerilim-birimdeformasyon ilişkisini belirleyen matriks; A, üçgen elemanın yüzey alanı; t, üçgen elemanın birim kalınlığı; T "transverse" matriksdir.

Gerilim - birimdeformasyon ilişkisini belirleyen [D] matriksi ise;

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{vmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu} \end{vmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada: E, elastik modül; $_{\nu}$, poisson oranıdır. Bilgisayar çözümlerine daha uygun oluşu nedeniyle, yöntemde içerilen denklemlerin matriks şekilleri kullanılmaktadır.

Şekil 3 sonlu-elemanlar sisteminde içerilen tipik bir üçgen elemanı göstermektedir. x, y köşe noktalarının koordinatlarını; U ve V, köşe noktalarının sırasıyla x ve y yönündeki yerdeğişimlerini; F, bu noktalara etki eden kuvvetleri göstermektedir.

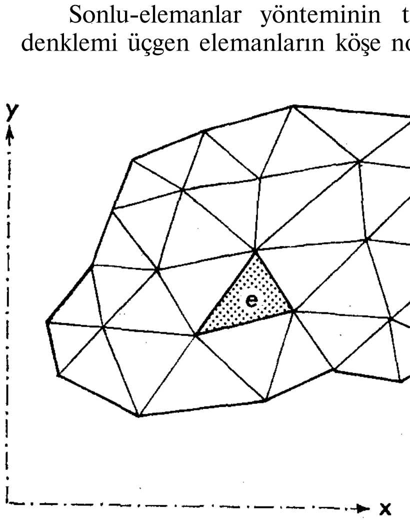
Sonlu-elemanlar yöntem iuygulamasında siste miçin öngörülen çözüme temel yaklaşım aşağıdaki işlemleri içerir-

a) Sistemin uygun sayıda ve uygun ölçekte üçgen elemanlara bölünmesi,

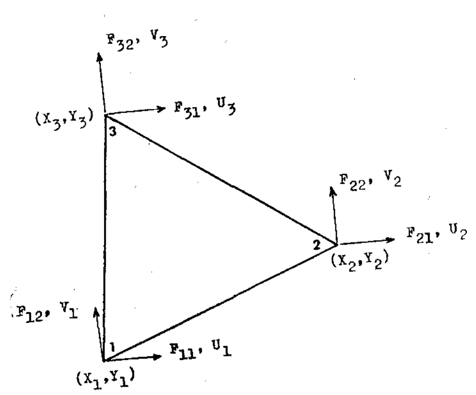
fo) Her üçgen eleman için bir "stiffness' matriksinin oluşturulması ve bunların biraraya getirilmesi ile tüm sistem için bir "stiffness" matriksi (K) nin saptanması,

c) Sistemin sınır koşullarının, bu sınırları oluşturan üçgen köşe noktalarına etki eden kuvvetler veya bunların yerdeğişimleri cinsinden saptanması,

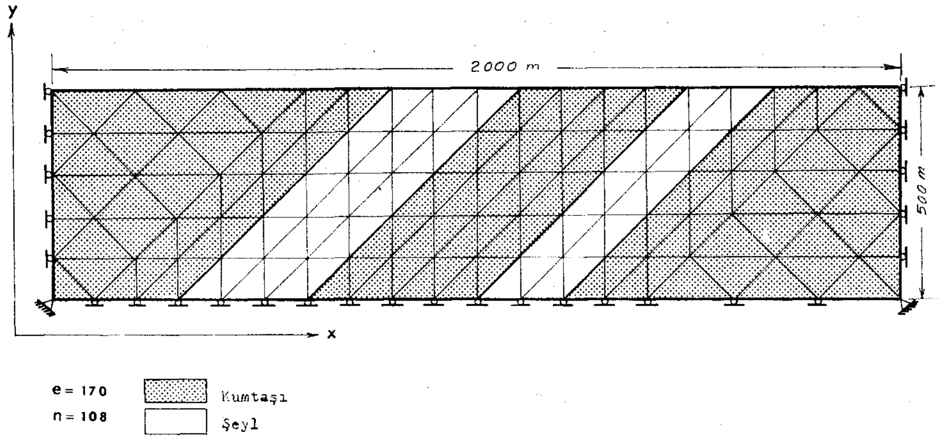
d) Model için oluşturulan kuvvet-yerdeğişim denklemini çözerek,



Şekil 2: Sürekli bir katının üçgen elemanlara bölümü



Şekil 3: Sonlu elementler sisteminde içerilen tipik bir üçgen eleman



Şekil 4: Yapısal-gravite modelinin sonlu elementler konfigürasyonu

üçgen köşe noktalarının bilinmeyen yerdeğişimleri (U) nin saptanması,

e) Bu yerdeğişimlerden, aşağıdaki birimdeformasyon - yerdeğişim ilişkisini kullanarak her üçgen eleman için birimdeformasyonun saptanması:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_i}{\partial y} = \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} = \gamma_{xy}$$

f) Son olarak, eleman birimdeformasyonlarından, aşağıdaki temel ilişkileri kullanarak her elemandaki gerilimin saptanması:

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu_1^2}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_2}{E_2}(1+\nu_1)\sigma_y$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu_2}{E_2}(1+\nu_1) + \frac{1}{E_2}\left(1-\frac{E_1}{E_2}\nu_2^2\right)\sigma_y$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G_2$$

Sonlu-elemanlar yönteminin sağladığı büyük kolaylık, sistemi oluşturan üçgen elemanların denge formüllerinin kısmî diferansiyel denklemler yerine bir basit diferansiyel denklemler grubu ile tanımlanabilmesidir. Bu yöntemin diğer bir üstün yanı da, gerek sistem geometrisi gerek içerilen malzeme özellikleri bakımından son derece genel olmasıdır.

ÖRNEK UYGULAMA

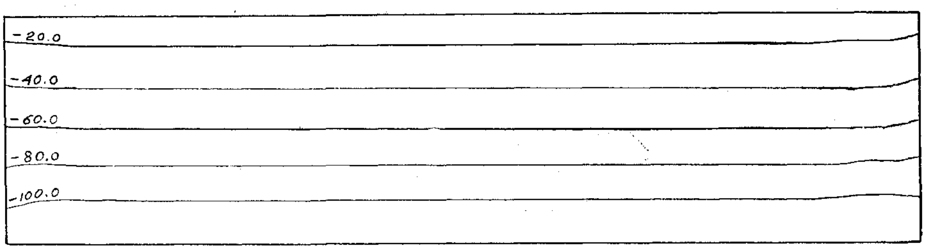
Sonlu-elemanlar yönteminin örnek uygulamasında, düz bir topografya ile sınırlı elastik-heterojen bir litolojik ortam öngörülmüş; ve böyle bir ortamı karakterize eden iki ayrı modelde, yerçekimi ve tektonik gerilim bileşenlerinin dağılımı incelenmiştir.

Öngörülen yapısal-yerçekimi modelinin sonlu-elemanlar konfigürasyonu Şekil 4'de; modelde içerilen litoloji birimlerinin (kumtaşı ve şeyi) fiziksel özellikleri ise Çizelge 1'de gösterilmiştir.

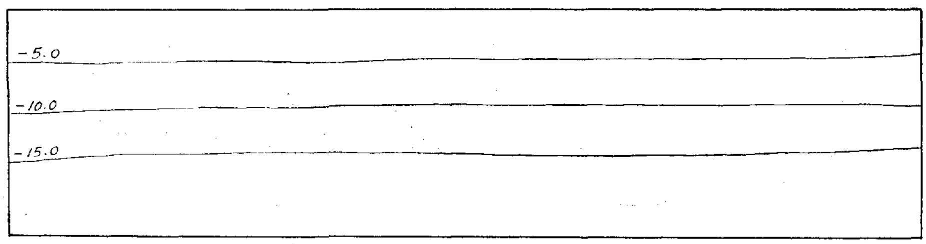
Önce, modelin homojen (salt kumtaşından oluşmuş) bir ortam olduğu varsayılarak, Şekil 4'de gösterilen sınır koşulları altında; ortamdaki olasıl düşey gerilimlerin, maksimum gerilimle-

Fiziksel Özellik	Kumtaşı	Şeyl
Elastisite modülü, E	6,6 × 10^5 kg/cm^2	3,2 × 10^5 kg/cm^2
Poisson oranı, ν	0,15	0,05
Makaslama modülü, G	2,8 × 10^5 kg/cm^2	1,6 × 10^5 kg/cm^2
Birim - ağırlık, γ	2,5 × 10^3 kg/cm^3	2,6 × 10^3 kg/cm^3

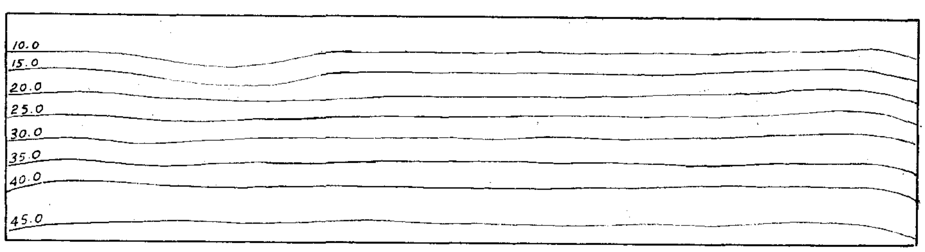
Çizelge 1:



Düşey gerilim konturları



Maksimum gerilim konturları



MakRİmum makaslama gerilimi konturları

Şekil .5: Düz bir topöğrafya altındaki elastik - homojen bir ortamda gravite gerilim bileşenlerinin dağılımı

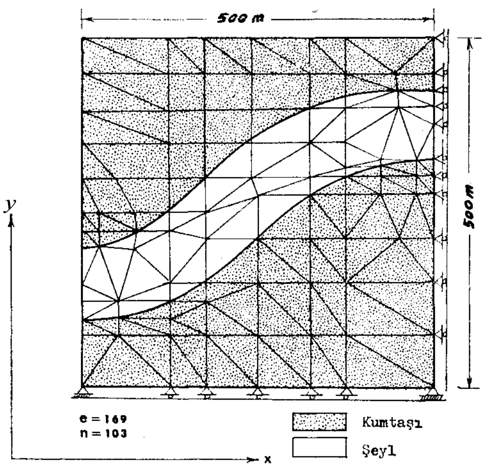
rin, ve maksimum makaslama gerilimlerinin dağılımı saptanmıştır. Daha sonra, aynı gerilim dağılımları, kumtaşı ve şeylden oluşmuş heterojen model için de saptanmış; ve her iki modelden elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak, ortamdaki heterojenliğin gerilim dağılımına olan etkileri gösterilmiştir (Şekil 5 ve 6).

Şekil 5'de gösterilen, homojen bir ortamdaki yerçekimi gerilimlerinin (düşey gerilimlerin) dağılımı, bununla ilgili teori ile uyum halindedir. Teorik olarak, yerkabuğu içinde yüzelden belirli derinlikteki bir noktaya etki eden düşey gerilim, noktanın içerildiği ortamın fiziksel özelliklerinin (özellikle birim-ağırlığınm) ve noktanın yüzeyden olan derinliğinin bir fonksiyonudur:

$$\sigma_v = \gamma h$$

Burada, σ_v, düşey gerilim, γ, birim-ağırlık, h, derinliktir. Buna göre, homojen bir ortamda, yüzeyden eşit derinlikteki bütün noktalardaki düşey gerilimler birbirine eşittir. Bu durum, Şekil 5'de görülen, birbirine paralel yatay konturlarla kanıtlanmıştır.

Şekil 6'daki heterojen ortam modelinde ise, düşey gerilim dağılımının, değişen malzeme özelliklerine paralel olarak değiştiği görülmektedir, örneğin, yüzeyden belirli bir derinlikte, şeyi içindeki bir noktaya etki eden düşey gerilim, aynı derinlikte, kumtaşı içindeki bir noktaya etki eden düşey gerilimden daha küçüktür. Modeldeki maksimum gerilim dağılımları da, aynı paralelde değişimler göstermektedir. Bu durum, ortamın deformasyon mekanizmasını büyük ölçüde etkileyebilir. Örneğin, yoğunluğu daha az olan litolojik birimlerin yerçekimi deformasyonu, yoğunluğu daha fazla olan birimlerdekine oranla daha büyük olur.

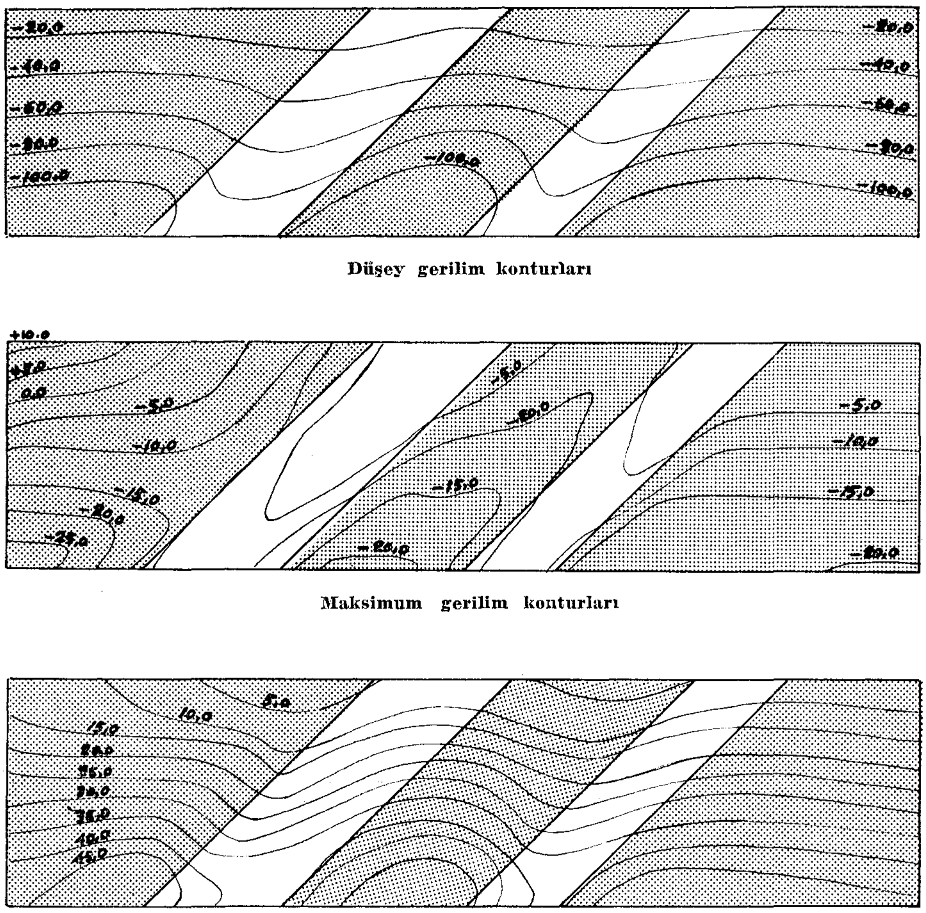


Şekil 7: Yapısal-tcktonik modelin sonlu elementler konfigürasyonu

Şekil 7'de gösterilen, ve tipik bir kıvrımın yarısını içeren yapısal tektonik modelde ise, kuvvet sınır koşulları yerine, yerdeğişim sınır koşulları uygulanmış; modelin sol kenarının (+ x) yönünde, tabana paralel olarak, 50 cm. kadar yerdeğiştirdiği öngörülmüştür. Bu yerdeğişimin sonucu olarak, sisteme (+ x) yönünde uygulanan tektonik gerilimlerin, sistem üzerindeki etkilerini saptayabilmek amacı ile; ortamın ağırlıksız (yerçekimi gerilimlerinin sıfır) olduğu varsayılmıştır.

Yapısal tektonik modeldeki maksimum makaslama gerilimlerinin dağılımı Şekil 8'de gösterilmiştir. Buna göre, sistemdeki gerilim birikimleri, kıvrımın alt ve üst kısımlarında (antiklin ve senklinlerin dönüm noktalarında), ve litoloj'ik birimler arasındaki dokunaklar boyunca oluşmaktadır. Bu durum, kıvrım mekanizmasının daha iyi anlaşılabilmesi yönünden ilginçtir.

Düzlem elastisite sorunlarının sonlu-elemanlar yöntemi ile çözümü, belirli bölünme sınırları içinde, doğru ve tam bir çözümdür. Bu yöntemle yapılan matematiksel çözümlemelerin herhangi bir aşamasında elde edilen toplam birimdeformasyon enerjisi, doğru çözüm için gerekli birimdeformasyon enerjisinden daha az olabilir. Buna göre, model çözümünden elde edilen yerdeğişim ve gerilim dağılımları, gerçek değerlerine oranla küçümsenmiş olur. Fakat, burada önemli olan; sorunun şekline ve özelliğine göre, modeldeki eleman büyüklüğünün ve sayısının, gerçek değerlere en iyi yaklaşım oluşturacak şekilde saptanmasıdır.

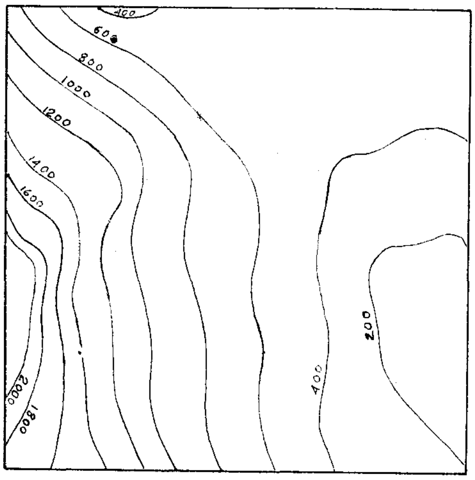


Düşey gerilim konturları

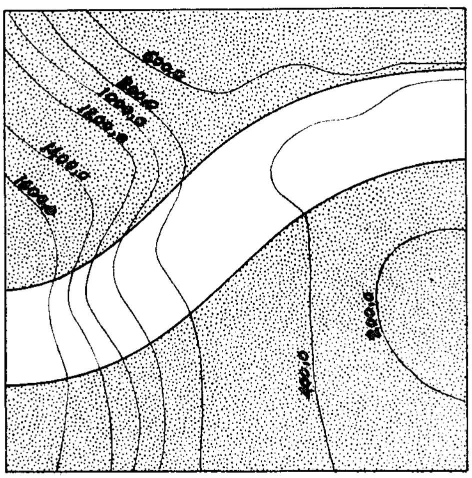
Maksimum gerilim konturları

Maksimum makaslama gerilimi konturları

Şekil 6: Düz bir topoğrafya altındaki elastik-heterojen bir ortamda gravite gerilim bileşenlerinin dağılımı



Elastik homojen



Elastik heterojen
gekil 8: Yapısal-tektonik modelde maksimum makaslama gerilimlerinin ılaiılımı

SONUÇIıAB

1) Yapısal - jeolojik bir ortamın uygun ölçekli ,bir matematiksel modeli hazırlanarak; malzeme özellikleri ve sınır koşulları için öngörülecek uygun varsayımlarla, ortamdaki gerilm ve yerdeğğm dağılımları, sonlu-elemanlar yöntemi ile analitik olarak saptanabilir.

2) Bu dağılımlardan; ortamdaki litolojik heterojenliğin ortamın deformasyon moduna olan etkisi, kritik gerilim birikim noktaları, olasıl kırılma yüzeylerinin yer ve doğrultuları, ortamdaki deformasyon ve yenilme mekanizması saptanabilir.

3) Sonlu-elemanlar yöntemi uygulamasında, model ortamının fiziksel özellikleri ve sınır koşulları için öngörülen varsayımların, gerçek jeolojik ortam için geçerli olması ve bu varsayımlara dayanılarak elde edilen sonuçların doğru olarak yorumlanmaları gerekir.

4) Sonlu-elemanlar yönteminde içerilen denklemlerin ve matematiksel çözümleme yöntemlerinin özellikleri; ve matematiksel modelde içerilen üçgen eleman sayısının çokluğu, sonlu-elemanlar yönteminin uygulanmasında, bilgisayardan yararlanmayı gerektirir.

5) Bilgisayarı ve sonlu-elemanlar yöntemini yerbilimlerinin çeşitli sorunlarına uygulama olanakları çok geniştir. Bu uygulamalardan elde edilecek sonuçlar, yerkabuğunun fiziksel yapısının saptanmasında büyük ölçüde yararlı olabilir.

Yayıma verildiği tarih: Aralık, 1974

DEĞİNİLMİŞ BELGELER

Clough, R. W., 1965: The Finite Element Method in Plane Stress Analysis: Proc. Am. Soc. Civil Engrs., p. 129-378.

Howard, J. H., 1966: Bull. Geol. Soc. America, Vol. 77, p. 1247.

Livesley, R. K., 1964: Matrix Methods in Structural Analysis: Pergamon Press.

Robinson, I. S., 1966: Structural Matrix Analysis for the Engineer: John Wiley and Sons.

Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C. and Topp., L. X, 1956: Journal of Aeronautical Sci., n. 23, p. 805.

Voight, B. and Samuelson, A. C, 1969, On the Application of Finite-Element Techniques to Problems Concerning Potential Distribution and Stress Analysis in the Earth Sciences: Pure and Applied Geophysics (Pageoph), Vol. 76, p. 40-55.

Zienkiewicz, O. C, 1967: Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics: McGraw-Hill.

Zienkiewicz, O. C, 1964: Stress Analysis: John Wiley and Sons.